Egzamin z **analizy matematycznej I.2**

29 czerwca 2022, 10:00 – 13:00

Rozwiązanie każdego zadania **należy** umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.
Proszę również podać nr grupy ćwiczeniowej lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.

---

1. (15p) Zbadać zbieżność całki

$$\int_0^1 \frac{x\sin\frac{1}{x}}{(1-x)^\alpha \ln(1+x)}dx$$

w zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

2. (15p.) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że dla wszystkich $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^{\frac{3}{2}} \Big| \ln|x-y| \Big|.$$

Wykazać, że f jest funkcją stałą.

---

3. (15p.)

(a) Wyznaczyć wszystkie $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3^n n + (-1)^n) x^{2n+1}$$

jest zbieżny.

(b) Wyznaczyć sumę tego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, dla których jest on zbieżny.

---

4. (15p.) Niech

$$f_n(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{1+n^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Określmy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Pokazać, że $f(x)$ jest określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i że f jest funkcją różniczkowalną.

---

5. (15p.) Ciąg $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ o wyrazach w $[0,1]$ nazwiemy *równomiernym*, gdy dla każdej funkcji ciągłej zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Wykazać, że ciąg $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ jest równomierny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^k = \frac{1}{k+1}.$$